Notions sur la mesure en sciences physiques

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

Jeudi 2 septembre 2021

Notions sur la mesure en sciences physiques

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

Jeudi 2 septembre 2021

Grandeurs physiques

- une grandeur physique est une caractéristique mesurable expérimentalement
- il faut pouvoir :
  - vérifier son égalité (à l'imprécision de la mesure près) entre deux corps : sens du signe =
  - déterminer son rapport entre deux corps

Grandeurs physiques

- une grandeur physique est une caractéristique mesurable expérimentalement
- il faut pouvoir :
  - vérifier son égalité (à l'imprécision de la mesure près) entre deux corps : sens du signe =
  - déterminer son rapport entre deux corps

Exemple (de la masse)

Balance de Roberval : égalité

Balance romaine : rapport

5 grandeurs fondamentales

- 5 grandeurs fondamentales indépendantes :

longueur (L)	durée (T)	masse (M)	intensité (I)	température (t)

5 grandeurs fondamentales

- 5 grandeurs fondamentales indépendantes :

longueur (L)	durée (T)	masse (M)	intensité (I)	température (t)

- permettent d'exprimer toute grandeur par produit/quotient :

5 grandeurs fondamentales

- 5 grandeurs fondamentales indépendantes :

longueur (L)	durée (T)	masse (M)	intensité (I)	température (t)

- permettent d'exprimer toute grandeur par produit/quotient :

Exemple

5 grandeurs fondamentales

- 5 grandeurs fondamentales indépendantes :

longueur (L)	durée (T)	masse (M)	intensité (I)	température (t)

- permettent d'exprimer toute grandeur par produit/quotient :

Exemple

- $[\text{vitesse}] = \mathrm{L.T}^{-1}$

5 grandeurs fondamentales

- 5 grandeurs fondamentales indépendantes :

longueur (L)	durée (T)	masse (M)	intensité (I)	température (t)

- permettent d'exprimer toute grandeur par produit/quotient :

Exemple

- $[\text{vitesse}] = \mathrm{L.T^{-1}}$
- $[\text{tension}] = \mathrm{M.L^{2}.I^{-1}.T^{-3}}$

7 unités fondamentales

Définitions expérimentales jusqu'en 2018

Grandeur	Symbole	Unité	Définition
longueur	L	mètre (m)	Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 seconde.
durée	T	seconde (s)	La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.
masse	M	kilogramme (kg)	Le kilogramme est la masse du prototype international, réalisé en platine allié à 10 pour 100 d'iridium, à 0,0001 près, conservé au Bureau International des Poids et Mesures, à Sèvres.
courant électrique	I	ampère (A)	L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à $2 \cdot 10^{-7}$ N par mètre de longueur.
température	t	kelvin (K)	Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau.
quantité de matière	N	mole (mol)	La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12.
intensité lumineuse	I_υ	candéla (cd)	La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \cdot 10^{12}$ Hz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian.

7 unités fondamentales

- 5 unités associées aux grandeurs fondamentales
- 2 unités faisant intervenir des objets particuliers (atome de carbone, œil humain)

7 unités fondamentales

- 5 unités associées aux grandeurs fondamentales
- 2 unités faisant intervenir des objets particuliers (atome de carbone, œil humain)

7 unités fondamentales

- 5 unités associées aux grandeurs fondamentales
- 2 unités faisant intervenir des objets particuliers (atome de carbone, œil humain)

on écrira plutôt :

Exemple

- $[\text{vitesse}] = \mathrm{L.T}^{-1}$, ou noté $[\text{vitesse}] = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
- $[\text{tension}] = \mathrm{M.L}^2.\mathrm{I}^{-1}.\mathrm{T}^{-3}$ ou noté $[\text{tension}] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{A}/\mathrm{s}^3$

Depuis 2019

Changement fondamental :

- on ne définit plus une unité par une expérience particulière
- on fixe les valeurs de certaines constantes fondamentales
- chaque phénomène faisant intervenir une de ces constantes permet de « réaliser un exemple » de l'unité

Constantes fondamentales

constante	symbole	valeur
fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	$9\,192\,631\,770\,\mathrm{Hz}$
vitesse de la lumière dans le vide	c	$299\,792\,458\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
constante de Planck	h	$6{,}626\,070\,15\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$
charge élémentaire	e	$1{,}602\,176\,634\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
constante de Boltzmann	k	$1{,}380\,649\cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$
constante d'Avogadro	N_{A}	$6{,}022\,140\,76\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence $540\cdot 10^{12}\,\mathrm{Hz}$	K_{cd}	$638\,\mathrm{lm\cdot W^{-1}}$

Constantes fondamentales

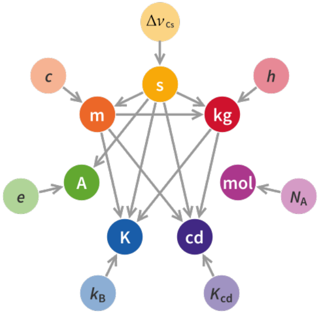
constante	symbole	valeur
fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	$9\,192\,631\,770\,\mathrm{Hz}$
vitesse de la lumière dans le vide	c	$299\,792\,458\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
constante de Planck	h	$6{,}626\,070\,15\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$
charge élémentaire	e	$1{,}602\,176\,634\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
constante de Boltzmann	k	$1{,}380\,649\cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$
constante d'Avogadro	N_{A}	$6{,}022\,140\,76\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence $540\cdot 10^{12}\,\mathrm{Hz}$	K_{cd}	$638\,\mathrm{lm\cdot W^{-1}}$

la constante des gaz parfaits, $R = N_{\mathrm{A}} k$ est donc elle-aussi fixée (on notera k_{B} la constante des gaz parfaits cette année).

Pour revenir aux unités

- une seconde est la durée de $9\,192\,634\,770$ oscillations de la transition hyperfine du ^{133}Cs
- un mètre est la distance parcourue par la lumière dans le vide en $(1/299\,792\,458)$s
- il faut retrouver les autres unités fondamentales à l'aide des dimensions des constantes fondamentales : le kilogramme est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Planck, h, égale à $6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ lorsqu'elle est exprimée en kg$\cdot$m$^2\cdot$s^{-1}, le mètre et la seconde étant définis en fonction de c et $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$:

Relations entre les constantes et unités



- tout dérive de la définition de la seconde
- il faut h, c et la seconde pour définir le kilogramme

Dimensions d'expressions composées

- la dimension d'un produit (quotient) est le produit (quotient) des dimensions :

Dimensions d'expressions composées

- la dimension d'un produit (quotient) est le produit (quotient) des dimensions :

Exemple (volume en fonction de longueurs)

$$[V] = \mathrm{m}^3 \quad \text{car : } V = \ell_x \times \ell_y \times \ell_z.$$

Dimensions d’expressions composées

- la dimension d’un produit (quotient) est le produit (quotient) des dimensions :

Exemple (volume en fonction de longueurs)

$$[V] = \mathrm{m}^3 \quad \text{car : } V = \ell_x \times \ell_y \times \ell_z.$$

- la dimension d’une dérivée est le quotient des dimensions :

Dimensions d'expressions composées

- la dimension d'un produit (quotient) est le produit (quotient) des dimensions :

Exemple (volume en fonction de longueurs)

$$[V] = \mathrm{m}^3 \quad \text{car : } V = \ell_x \times \ell_y \times \ell_z.$$

- la dimension d'une dérivée est le quotient des dimensions :

Exemple (vitesse en fonction de longueur et durée)

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \text{et : } \quad [v] = \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} = \frac{[x]}{[t]}.$$

Dimensions d'expressions composées

- la dimension d'un produit (quotient) est le produit (quotient) des dimensions :

Exemple (volume en fonction de longueurs)

$$[V] = \mathrm{m}^3 \quad \text{car : } V = \ell_x \times \ell_y \times \ell_z.$$

- la dimension d'une dérivée est le quotient des dimensions :

Exemple (vitesse en fonction de longueur et durée)

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \text{et :} \quad [v] = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = \frac{[x]}{[t]}.$$

- la dimension d'une intégrale est le produit des dimensions

Dimensions d'expressions composées

- la dimension d'un produit (quotient) est le produit (quotient) des dimensions :

Exemple (volume en fonction de longueurs)

$$[V] = \mathrm{m}^3 \quad \text{car : } V = \ell_x \times \ell_y \times \ell_z.$$

- la dimension d'une dérivée est le quotient des dimensions :

Exemple (vitesse en fonction de longueur et durée)

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \text{et :} \quad [v] = \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} = \frac{[x]}{[t]}.$$

- la dimension d'une intégrale est le produit des dimensions

Exemple (vitesse v_x en fonction de l'accélération a_x)

$$v_x(t) - v_x(t=0) = \int_{t=0}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t \textit{ ie}$$

$$[v_x] = \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} = [a_x]\,T = \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2} \times \text{second}.$$

Équations aux dimensions

$A = B$ n'a de sens que si A et B ont même dimension

Équations aux dimensions

$A = B$ n'a de sens que si A et B ont même dimension
on peut décomposer une grandeur non fondamentale :

Exemple

$\mathcal{E}_{\text{cin}} = \frac{1}{2}mv^2$ est une énergie donc $[\mathcal{E}_{\text{cin}}] =$

Équations aux dimensions

$A = B$ n'a de sens que si A et B ont même dimension
on peut décomposer une grandeur non fondamentale :

Exemple

$\mathscr{E}_{\text{cin}} = \frac{1}{2}mv^2$ est une énergie donc $[\mathscr{E}_{\text{cin}}] = \mathrm{kg.m^2.s^{-2}}$

Équations aux dimensions

$A = B$ n'a de sens que si A et B ont même dimension
on peut vérifier la vraisemblance d'une égalité :

Exemple (période T d'un pendule simple)

En fonction de l'accélération de la pesanteur g et de la longueur l du pendule

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}$$

Équations aux dimensions

$A = B$ n'a de sens que si A et B ont même dimension
on peut vérifier la vraisemblance d'une égalité :

Exemple (période T d'un pendule)

En fonction de l'accélération de la pesanteur g et de la longueur l du pendule

$$[T] = \sqrt{\mathrm{m} \times \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}} = \mathrm{s}$$

on ne peut pas vérifier la valeur des termes sans dimension (2π)

Équations aux dimensions

$A = B$ n'a de sens que si A et B ont même dimension
on peut vérifier la vraisemblance d'une égalité :

Exemple (période T d'un pendule)

En fonction de l'accélération de la pesanteur g et de la longueur l du pendule

$$[T] = \sqrt{\mathrm{m} \times \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}} = \mathrm{s}$$

on ne peut pas vérifier la valeur des termes sans dimension (2π)

Équations aux dimensions

- ☠ : $A+B$ n'a de sens que si A et B ont même dimension
- ☠ : $\cos(A), \ln(A)\dots$ n'ont de sens que si A est sans dimension

1. Grandeurs et dimensions

2. Incertitudes

3. Exercices

Objectif

- Aucune mesure n'est infiniment précise/juste.

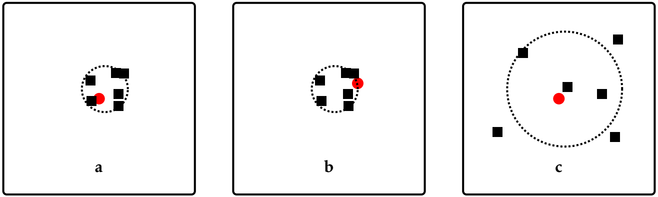
Objectif

- Aucune mesure n'est infiniment précise/juste.
- Il faut estimer l'incertitude et l'indiquer quand on communique le résultat.

Incertitudes

On étudie les résultats fournis par la répétition d'une même mesure, selon le même protocole.

- La précision de la mesure caractérise la reproductibilité de son résultat : les différentes valeurs obtenues sont très proches les unes des autres.
- La mesure est dite juste si la valeur moyenne des résultats est proche de la valeur « vraie ».



Sources d'incertitudes

Erreurs systématiques : identiques à chaque mesure, dues à un défaut de l'appareil ou du protocole.

Sources d'incertitudes

Erreurs systématiques : identiques à chaque mesure, dues à un défaut de l'appareil ou du protocole.

Erreurs aléatoires : varient à chaque mesure, nulles en moyenne.

Sources d'incertitudes

Erreurs systématiques : identiques à chaque mesure, dues à un défaut de l'appareil ou du protocole.

Erreurs aléatoires : varient à chaque mesure, nulles en moyenne.

Sources d'incertitudes

Erreurs systématiques : identiques à chaque mesure, dues à un défaut de l'appareil ou du protocole.

Erreurs aléatoires : varient à chaque mesure, nulles en moyenne.

- La répétition des mesures permet de diminuer l'effet des erreurs aléatoires.

Sources d'incertitudes

Erreurs systématiques : identiques à chaque mesure, dues à un défaut de l'appareil ou du protocole.

Erreurs aléatoires : varient à chaque mesure, nulles en moyenne.

- La répétition des mesures permet de diminuer l'effet des erreurs aléatoires.
- Des mesures précises par des protocoles différents permettent de déceler la présence d'erreurs systématiques.

Étude statistique

La valeur « vraie » est toujours inconnue mais l'incertitude peut être estimée par des moyens statistiques.

- La répétition de la mesure augmente la confiance dans la valeur moyenne.

Étude statistique

La valeur « vraie » est toujours inconnue mais l’incertitude peut être estimée par des moyens statistiques.

- La répétition de la mesure augmente la confiance dans la valeur moyenne.
- La précision renseigne sur la probabilité que le résultat d’une mesure soit proche de la valeur moyenne, ce qui ne garantit cependant pas qu’on aura accès à la valeur « vraie ».

Étude statistique

La valeur « vraie » est toujours inconnue mais l'incertitude peut être estimée par des moyens statistiques.

- La répétition de la mesure augmente la confiance dans la valeur moyenne.
- La précision renseigne sur la probabilité que le résultat d'une mesure soit proche de la valeur moyenne, ce qui ne garantit cependant pas qu'on aura accès à la valeur « vraie ».
- Une étude statistique permet d'estimer un intervalle de confiance dans lequel 68% (par exemple) des résultats seront obtenus.

Étude statistique

La valeur « vraie » est toujours inconnue mais l'incertitude peut être estimée par des moyens statistiques.

- La répétition de la mesure augmente la confiance dans la valeur moyenne.
- La précision renseigne sur la probabilité que le résultat d'une mesure soit proche de la valeur moyenne, ce qui ne garantit cependant pas qu'on aura accès à la valeur « vraie ».
- Une étude statistique permet d'estimer un intervalle de confiance dans lequel 68% (par exemple) des résultats seront obtenus.
- Les caractéristiques de chaque appareil de mesure doivent indiquer un intervalle de confiance.

Présentation d'un résultat

$$X \pm \Delta X$$

- X est le résultat de la mesure, ΔX est l'incertitude-type caractéristant l'écart-type de la répartition des résultats de mesure
- L'intervalle $[X - \Delta X ; X + \Delta X]$ représente un intervalle de confiance
- $\frac{\Delta X}{X}$ est l'incertitude-type relative.

Présentation d'un résultat

$$X \pm \Delta X$$

- X est le résultat de la mesure, ΔX est l'incertitude-type caractéristant l'écart-type de la répartition des résultats de mesure
- L'intervalle $[X - \Delta X ; X + \Delta X]$ représente un intervalle de confiance
- $\frac{\Delta X}{X}$ est l'incertitude-type relative.

Présentation d'un résultat

$$X \pm \Delta X$$

- X est le résultat de la mesure, ΔX est l'incertitude-type caractéristant l'écart-type de la répartition des résultats de mesure
- L'intervalle $[X - \Delta X ; X + \Delta X]$ représente un intervalle de confiance
- $\frac{\Delta X}{X}$ est l'incertitude-type relative.

Exemples :

$$\mathscr{G} = 6{,}674\,30(15) \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

aussi noté : $\mathscr{G} = 6{,}674\,30 \pm 0{,}000\,15 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ $\quad \frac{\Delta \mathscr{G}}{\mathscr{G}} = 2{,}2 \cdot 10^{-5}$.

Présentation d'un résultat

$$X \pm \Delta X$$

- X est le résultat de la mesure, ΔX est l'incertitude-type caractéristant l'écart-type de la répartition des résultats de mesure
- L'intervalle $[X - \Delta X ; X + \Delta X]$ représente un intervalle de confiance
- $\frac{\Delta X}{X}$ est l'incertitude-type relative.

Exemples :

$$R_y = 10\,973\,731{,}568\,160(21)\,\mathrm{m}^{-1}$$

aussi noté : $R_y = 10\,973\,731{,}568\,160 \pm 0{,}000\,021\,\mathrm{m}^{-1}$ $\quad \dfrac{\Delta R_y}{R_y} = 2.10^{-12}$.

Présentation d'un résultat

$$X \pm \Delta X$$

- X est le résultat de la mesure, ΔX est l'incertitude-type caractérisant l'écart-type de la répartition des résultats de mesure
- L'intervalle $[X - \Delta X; X + \Delta X]$ représente un intervalle de confiance
- $\frac{\Delta X}{X}$ est l'incertitude-type relative.

Remarques :

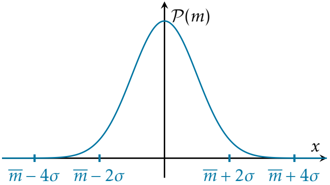
- Pour une même incertitude-type ΔX la fraction des résultats tombant dans l'intervalle $[X - \Delta X; X + \Delta X]$ dépend de la répartition statistique des erreurs de mesure.
- On pourra utiliser une incertitude-type élargie d'un facteur $k > 1$ en notant :

$$X \pm \Delta X_k(k) \quad \text{avec } \Delta X_k = k\Delta X,$$

Distribution normale

Cas particulier de la loi normale :
répartition des erreurs caractérisée par la fonction gaussienne :

$$\exp\left(-\frac{(m-\overline{m})^2}{2\sigma^2}\right)$$

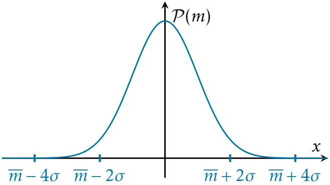


- moyenne $\overline{m}$
- écart-type σ
  - intervalle de confiance de 68% des mesures dans l'intervalle $\overline{m}-\sigma, \overline{m}+\sigma$

Distribution normale

Cas particulier de la loi normale :
répartition des erreurs caractérisée par la fonction gaussienne :

$$\exp\left(-\frac{(m-\overline{m})^2}{2\sigma^2}\right)$$

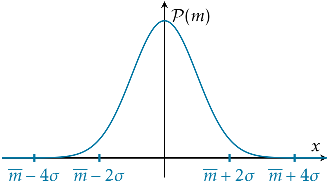


- moyenne $\overline{m}$
- écart-type σ
  - intervalle de confiance de 68% des mesures dans l'intervalle $\overline{m}-\sigma, \overline{m}+\sigma$
  - un facteur d'élargissement de 2 conduit à un intervalle $\overline{m}-2\sigma, \overline{m}+2\sigma$ correspondant à un intervalle de confiance de 95%

Distribution normale

Cas particulier de la loi normale :
répartition des erreurs caractérisée par la fonction gaussienne :

$$\exp\left(-\frac{(m-\overline{m})^2}{2\sigma^2}\right)$$

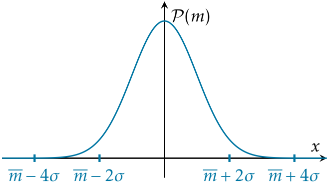


- moyenne $\overline{m}$
- écart-type σ
  - intervalle de confiance de 68% des mesures dans l'intervalle $\overline{m}-\sigma, \overline{m}+\sigma$
  - un facteur d'élargissement de 2 conduit à un intervalle $\overline{m}-2\sigma, \overline{m}+2\sigma$ correspondant à un intervalle de confiance de 95%
  - pour toute distribution d'erreurs, la répartition des moyennes de N mesures identiques tend vers la loi normale

Distribution normale

Cas particulier de la loi normale :
répartition des erreurs caractérisée par la fonction gaussienne :

$$\exp\left(-\frac{(m-\overline{m})^2}{2\sigma^2}\right)$$



- moyenne $\overline{m}$
- écart-type σ
  - intervalle de confiance de 68% des mesures dans l'intervalle $\overline{m}-\sigma, \overline{m}+\sigma$
  - un facteur d'élargissement de 2 conduit à un intervalle $\overline{m}-2\sigma, \overline{m}+2\sigma$ correspondant à un intervalle de confiance de 95%
  - pour toute distribution d'erreurs, la répartition des moyennes de N mesures identiques tend vers la loi normale
  - on considérera donc implicitement toute source d'erreurs comme normale

Estimation de l'incertitude

Par un traitement statistique : incertitude de type A

ΔX est l'écart-type des valeurs mesurées. Demande du temps ou des objets identiques à mesurer par plusieurs manipulateurs. On calculera cet écart-type en TP de chimie.

Pour une seule mesure : incertitude de type B

- à l'aide des notices d'appareils
- en tenant compte de la fiabilité du protocole de mesure

Calcul de l'incertitude-type de type A

- On reproduit N fois la mesure d'une grandeur et on note $m_i, i = 1..N$ les valeurs obtenues. On définit la valeur moyenne :

$$\overline{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} m_i,$$

l'estimation sera $X = \overline{m}$

Calcul de l'incertitude-type de type A

- On reproduit N fois la mesure d'une grandeur et on note $m_i, i = 1..N$ les valeurs obtenues. On définit la valeur moyenne :

$$\overline{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_i,$$

  l'estimation sera $X = \overline{m}$
- On peut alors calculer l'écart-type corrigé :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(m_i - \overline{m})^2},$$

Calcul de l'incertitude-type de type A

- On reproduit N fois la mesure d'une grandeur et on note $m_i, i = 1..N$ les valeurs obtenues. On définit la valeur moyenne :

$$\overline{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} m_i,$$

l'estimation sera $X = \overline{m}$

- On peut alors calculer l'écart-type corrigé :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (m_i - \overline{m})^2},$$

- l'écart-type sur les moyennes de N mesures sera :

$$\Delta X = \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

d'autant plus petit que N est élevé : le nombre de mesures augmente la précision

Calcul de l'incertitude-type de type A

- On reproduit N fois la mesure d'une grandeur et on note $m_i, i = 1..N$ les valeurs obtenues. On définit la valeur moyenne :

$$\overline{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} m_i,$$

l'estimation sera $X = \overline{m}$

- On peut alors calculer l'écart-type corrigé :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (m_i - \overline{m})^2},$$

- l'écart-type sur les moyennes de N mesures sera :

$$\Delta X = \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

d'autant plus petit que N est élevé : le nombre de mesures augmente la précision

- On présente ensuite : $X \pm \Delta X$

Exemples d'incertitudes-types de type B

- lecture sur une règle graduée :

$$\Delta X = \frac{1/2 \text{ graduation}}{\sqrt{3}} \simeq 0{,}3 \text{ graduation},$$

  en supposant que toute valeur entre les deux graduations est aussi probable

- lecture sur un multimètre numérique

$$\Delta X = 0{,}3\% \text{ affichage} + 2 \text{ unités de représentation}$$

Propagation des erreurs : fonction d'une seule variable

- on calcule X à partir de la mesure de x, selon $X = f(x)$

Propagation des erreurs : fonction d'une seule variable

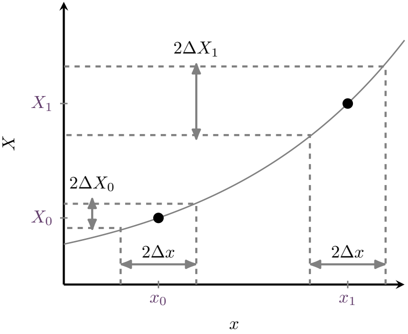
- on calcule X à partir de la mesure de x, selon $X = f(x)$
- l'incertitude sur x est Δx

Propagation des erreurs : fonction d'une seule variable

- on calcule X à partir de la mesure de x, selon $X = f(x)$
- l'incertitude sur x est Δx

Propagation des erreurs : fonction d'une seule variable

- on calcule X à partir de la mesure de x, selon $X = f(x)$
- l'incertitude sur x est Δx



- l'incertitude sur X dépend de Δx mais aussi de la valeur de x
- à Δx fixée, ΔX est d'autant plus importante que $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ est importante

$$\Delta X \simeq \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right| \Delta x.$$

Propagation des erreurs : fonction de plusieurs variables

- on calcule X à partir des mesures de $x_1, x_2, \ldots$: $X = F(x_1, x_2, \ldots)$.

Propagation des erreurs : fonction de plusieurs variables

- on calcule X à partir des mesures de $x_1, x_2, \ldots$: $X = F(x_1, x_2, \ldots)$.
- chacune est entachée d'une incertitude $\Delta x_1, \Delta x_2 \ldots$ et les erreurs sont supposées indépendantes les unes des autres.

Propagation des erreurs : fonction de plusieurs variables

- on calcule X à partir des mesures de $x_1, x_2, \ldots$: $X = F(x_1, x_2, \ldots)$.
- chacune est entachée d'une incertitude $\Delta x_1, \Delta x_2 \ldots$ et les erreurs sont supposées indépendantes les unes des autres.

Propagation des erreurs : fonction de plusieurs variables

- on calcule X à partir des mesures de $x_1, x_2, \ldots$: $X = F(x_1, x_2, \ldots)$.
- chacune est entachée d'une incertitude $\Delta x_1, \Delta x_2 \ldots$ et les erreurs sont supposées indépendantes les unes des autres.

on estime que :

Dérivées partielles

l'incertitude sur x_1, contribue à celle sur X comme si $x_2 \ldots$ avait une incertitude nulle. On calcule cette contribution, ΔX_1 en dérivant F par rapport à x_1 en considérant $x_2 \ldots$ constantes. On note :

$$\Delta X_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{x_2,\ldots} \Delta x_1$$

« d rond f sur d rond x_1 » à $x_2 \ldots$ constants.

on somme ensuite quadratiquement les ΔX_i :

$$\Delta X \simeq \sqrt{\sum_i \Delta X_i^2} = \sqrt{\sum_i \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i \right|^2}.$$

on somme ensuite quadratiquement les ΔX_i :

$$\Delta X \simeq \sqrt{\sum_i \Delta X_i^2} = \sqrt{\sum_i \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i \right|^2}.$$

- la somme quadratique correspond à la propagation d'erreurs réparties selon une fonction gaussienne,
- on peut montrer que la combinaison de plusieurs sources d'erreurs tend vers une loi normale quand le nombre de sources croît

on somme ensuite quadratiquement les ΔX_i :

$$\Delta X \simeq \sqrt{\sum_i \Delta X_i^2} = \sqrt{\sum_i \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i \right|^2}.$$

Exemples

- $X = x_1 + x_2$

$$\Delta X \simeq \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}$$

- $X = \frac{A^\alpha B^\beta}{C^\gamma}$

$$\frac{\Delta X}{X} \simeq \sqrt{\left(\alpha \frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\beta \frac{\Delta B}{B}\right)^2 + \left(\gamma \frac{\Delta C}{C}\right)^2}$$

Les erreurs relatives s'ajoutent quadratiquement dans ce cas.

Incertitude-type composée

- on étudie une valeur X calculée à partir de plusieurs mesures m_i

Incertitude-type composée

- on étudie une valeur X calculée à partir de plusieurs mesures m_i
- on aura des incertitudes-types de type A (parfois) et de type B (toujours) pour chaque mesure permettant de calculer par propagation les incertitudes-types ΔX_{Ai} et ΔX_{Bi}

Incertitude-type composée

- on étudie une valeur X calculée à partir de plusieurs mesures m_i
- on aura des incertitudes-types de type A (parfois) et de type B (toujours) pour chaque mesure permettant de calculer par propagation les incertitudes-types ΔX_{Ai} et ΔX_{Bi}

Incertitude-type composée

On tient compte des différentes incertitudes-types affectant une mesure en calculant l'incertitude-type composée :

$$\Delta X = \sqrt{\sum_i \Delta X_{Ai}^2 + \Delta X_{Bi}^2}.$$

Utilisation d'un logiciel

le logiciel `Gum_MC` estime l'incertitude sur la grandeur calculée en fonction des incertitudes sur les grandeurs mesurées :

Utilisation d'un logiciel

le logiciel `Gum_MC` estime l'incertitude sur la grandeur calculée en fonction des incertitudes sur les grandeurs mesurées :

- on rentre pour chaque grandeur, sa valeur mesurée, son incertitude et un modèle de distribution des erreurs

Utilisation d'un logiciel

le logiciel `Gum_MC` estime l'incertitude sur la grandeur calculée en fonction des incertitudes sur les grandeurs mesurées :

- on rentre pour chaque grandeur, sa valeur mesurée, son incertitude et un modèle de distribution des erreurs
- il donne l'incertitude sur la grandeur calculée :

Utilisation d'un logiciel

le logiciel `Gum_MC` estime l'incertitude sur la grandeur calculée en fonction des incertitudes sur les grandeurs mesurées :

- on rentre pour chaque grandeur, sa valeur mesurée, son incertitude et un modèle de distribution des erreurs
- il donne l'incertitude sur la grandeur calculée :
  - par un calcul analytique de propagation,

Utilisation d'un logiciel

le logiciel `Gum_MC` estime l'incertitude sur la grandeur calculée en fonction des incertitudes sur les grandeurs mesurées :

- on rentre pour chaque grandeur, sa valeur mesurée, son incertitude et un modèle de distribution des erreurs
- il donne l'incertitude sur la grandeur calculée :
  - par un calcul analytique de propagation,
  - par une simulation statistique d'un grand nombre de mesures (méthode Monte Carlo)

Utilisation d'un logiciel

le logiciel `Gum_MC` estime l'incertitude sur la grandeur calculée en fonction des incertitudes sur les grandeurs mesurées :

- on rentre pour chaque grandeur, sa valeur mesurée, son incertitude et un modèle de distribution des erreurs
- il donne l'incertitude sur la grandeur calculée :
  - par un calcul analytique de propagation,
  - par une simulation statistique d'un grand nombre de mesures (méthode Monte Carlo)

Utilisation d’un logiciel

le logiciel `Gum_MC` estime l’incertitude sur la grandeur calculée en fonction des incertitudes sur les grandeurs mesurées :

- on rentre pour chaque grandeur, sa valeur mesurée, son incertitude et un modèle de distribution des erreurs
- il donne l’incertitude sur la grandeur calculée :
  - par un calcul analytique de propagation,
  - par une simulation statistique d’un grand nombre de mesures (méthode Monte Carlo)
- pratique pour des fonctions un peu compliquées,
- ne dispense pas de savoir calculer (de tête…) dans les cas simples

Interprétation des incertitudes-types

- Une faible incertitude-type relative caractérise une mesure précise

Interprétation des incertitudes-types

- Une faible incertitude-type relative caractérise une mesure précise
- on compare deux mesures 1 et 2 indépendantes d'une même grandeur à l'aide de l'écart-type normalisé :

Les mesures sont d'autant plus compatibles qu'il est petit devant 1.

Interprétation des incertitudes-types

- Une faible incertitude-type relative caractérise une mesure précise
- on compare deux mesures 1 et 2 indépendantes d'une même grandeur à l'aide de l'écart-type normalisé :

Écart normalisé

$$EN = \frac{|X_1 - X_2|}{\sqrt{\Delta X_1^2 + \Delta X_2^2}}.$$

Les mesures sont d'autant plus compatibles qu'il est petit devant 1.

En TP

- Être attentif à la précision du protocole, à la précision des instruments.
- Estimer l'incertitude-type sur chaque mesure et celle sur la valeur calculée en utilisant quand c'est indispensable la formule sur les incertitudes relatives mais en préférant le calcul à partir des incertitudes-types relatives si possible.
- Calculer l'incertitude-type composée.
- Donner le résultat accompagné de son incertitude-type relative.
- Comparer au modèle, à une valeur tabulée, à la moyenne de la classe à l'aide de l'écart normalisé.

1. Grandeurs et dimensions

2. Incertitudes

3. Exercices

Équations aux dimensions

- Déterminer la dimension d'une charge q, d'une force F, d'une tension U, d'une résistance R
- la force exercée par un ressort est $F = k\Delta\ell$ avec k la constante de raideur et $\Delta\ell$ l'allongement (une longueur) du ressort. Déterminer l'unité de la constante de raideur en unités fondamentales SI.
- Parmi ces expressions, la(les) quelle(s) peut(peuvent) correspondre à la pulsation d'un système oscillant :

$$k/m \quad \sqrt{km} \quad \sqrt{k/m} \quad \cos(k/m) \quad \sqrt{k/m}\cos\left(k\ell/(mg)\right),$$

avec g une accélération, k une constante de raideur, ℓ une longueur et m une masse.

Définition expérimentale du kilogramme

- Rappeler l'expression de l'énergie d'une transition électronique de fréquence ν en fonction de h, ainsi que la dimension d'une énergie en fonction des unités SI.
- En mécanique la quantité de mouvement d'un objet de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$ est : $\vec{p} = m\vec{v}$. En déduire, par analyse dimensionnelle une expression de la quantité de mouvement d'un photon associé à un rayonnement de fréquence ν à l'aide des constantes h et c. On admet que l'expression la plus simple (sans constantes sans dimension) est la bonne.
- En déduire le principe d'une définition expérimentale[1] du kilogramme en utilisant le phénomène de l'absorption d'un photon par un atome au cours de laquelle l'atome reçoit la quantité de mouvement du photon. (On admettra qu'on a déjà défini la seconde et le mètre).

[1] Ce n'est pas la méthode effectivement employée : elle fait appel au dispositif de la Balance de Kibble

Calculs d'incertitude : dérivées logarithmiques

1. Soit une grandeur $X = \prod_{i=1}^{N} A_i^{\alpha_i}$. Exprimer ses dérivées logarithmiques : $\left(\frac{\partial \ln(X)}{\partial A_i}\right)_1$ pour tout i.
2. En déduire l'estimation de l'incertitude relative $\frac{\Delta X}{X}$ en fonction des incertitudes relatives des grandeurs A_i $(\Delta A_i / A_i)$.

Calculs d'incertitude : cas d'une dilution

On pèse une masse $m = 2{,}0045\,\text{g}$ de chlorure de sodium NaCl, de masse molaire $M(\text{NaCl}) = 58{,}443(2)\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$, que l'on dissout à l'aide d'une fiole jaugée de volume $V = 100\,\text{mL}$.

1. a. Quelle est la valeur mesurée de la concentration C, de la solution de chlorure de sodium
   b. Donner l'incertitude-type de type B et son incertitude-type relative pour chacune des sources d'erreur
   c. En déduire l'incertitude-type relative composée sur la mesure de la concentration puis l'incertitude-type composée.
   d. Présenter la valeur de C mesurée sous la forme :

$$C = xxx \pm yyy\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}.$$

2. Quelle est la principale source d'erreur ? Qu'en serait-il si on utilisait la valeur $M = 58{,}4\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

L'incertitude sur le volume de la fiole jaugée (égale à l'écart-type des résultats de mesures identiques), est égale à $0{,}1\,\text{mL}$, celle sur la pesée est égale à $0{,}1\,\text{mg}$.

Correction

- $\Delta m/m \simeq 10^{-4}/2 = 5.10^{-5} = 5.10^{-3}\,\%$
- $\Delta M/M \simeq 2.10^{-3}/58 = 3.10^{-5} = 3.10^{-3}\,\%$
- $\Delta V/V = 0,1/100 = 10^{-3} = 10^{-1}\,\%$
- $\Delta C/C \simeq 1.10^{-1}\,\%$ *ie*

$$C = 3{,}4298(4)\cdot 10^{-1}\,\mathrm{mol}\cdot\mathrm{L}^{-1} \quad C = 3{,}4298\,\mathrm{mol}\cdot\mathrm{L}^{-1} \text{ à } 0,1\,\% \text{ près.}$$

Logiciel Gum_MC

Ordres de grandeur et constantes

Donner une valeur, éventuellement approchée, des constantes suivantes :

- vitesse de la lumière dans le vide,
- constante d'Avogadro,
- constante gravitationnelle,
- charge élémentaire de l'électron,
- masses de l'électron et du proton,
- constante de Planck.

Donner un ordre de grandeur :

- de la taille d'un atome,
- de la longueur d'onde d'un rayonnement lumineux visible,
- du rayon terrestre, du rayon lunaire, de la distance Terre-Lune
- de la distance Terre-Soleil,
- de l'âge de la Terre,
- de l'âge de l'univers.

Correction

- $c = 299792458$ m.s^{-1},
- $N_{\mathscr{A}} = 6,0221415\ 10^{23}$mol^{-1},
- $\mathscr{G} = 6,6742\ 10^{-11}$m^3.kg^{-1}.s^{-2},
- $q = 1,60217653\ 10^{-19}$C,
- $m_e = 9,1093826\ 10^{-31}$kg, $m_p = 1,67262171\ 10^{-27}$kg,
- $6,6260693\ 10^{-34}$J.s.

- taille d'un atome : 1Å$= 10^{-10}$ m,
- de la longueur d'onde d'un rayonnement lumineux visible : $\lambda \simeq 500$ nm,
- rayon terrestre : $R_T = 6378$ km, $R_L \simeq R_T/4$, $r_{TL} \simeq 60R_T$
- distance Terre-Soleil $1u.a. = 149597870691$ m (150 millions de km),
- âge de la terre : $4,55\ 10^9$ années,
- âge de l'univers : $13,7\ 10^9$ années.